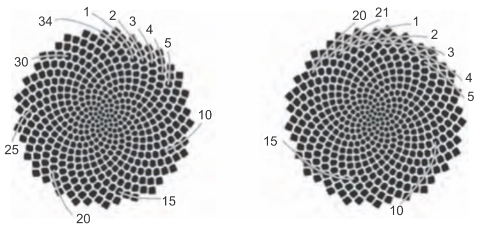
Revisão UEL
Matemática 1
Prof. João Capri

1. (Uel) Os frutos do girassol formam espirais que, quando contadas separadamente, à esquerda e à direita, admitem um comportamento irregular: não coincidem. Na figura a seguir, as espirais contadas em um sentido totalizam 34 e, no outro, totalizam 21.



Adaptado de: https://blogs.glowscotland.org.uk/

Na obra *Aspectos Ontológicos* e *Histórico-Culturais das Relações Ciências-Artes*, György Darvas menciona que, de modo geral, os números de espirais, à esquerda e à direita, apesar de não coincidirem, obedecem a um padrão matemático e pertencem ao conjunto $F = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\}$

Seja $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ e admita que F é o conjunto imagem da função $f: \bullet \longrightarrow \bullet$ que satisfaz

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 1 \\ f(n+2) = f(n+1) + f(n) \text{ para todo } n \in \bullet \end{cases}$$

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente e para todo $n \in \bullet$, o valor de f(n + 5) em função de f(n + 1) e de f(n).
a) f(n + 1) + f(n) b) f(n + 1) + 2f(n) c) 2f(n + 1) + 3f(n)
d) 5f(n + 1) + 3f(n) e) 5f(n + 1) + 8f(n)

2. (Uel) Leia o texto a seguir.
Lorenz cunhou a famosa expressão “efeito borboleta” – que teoriza que o bater de asas de uma borboleta produz uma minúscula alteração do estado da atmosfera. Assim, com o longo passar do tempo, um ciclone que deveria ter devastado o litoral da Indonésia não acontece. Ou acontece um que não iria acontecer.
Adaptado de: STEWART, Ian. Será que Deus Joga Dados – A Nova Matemática do Caos. Jorge Zahar Editor. Página 155. 1991.

Com receio da verdadeira natureza dos números, é comum seu “arredondamento”, de modo a simplificar operações e encurtar processos. Contudo, há um risco ao se trocar um número por outro – ainda que próximos. Pequenas diferenças, quando acumuladas, resultam em alterações significativas e materializam o caos matemático previsto por Lorenz.

Considere a função $B: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$B(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1, \text{ se } \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Seja $F = B \circ B \circ B \circ B \circ B \circ B \circ B \circ B \circ B$ isto é, B composta com ela mesmo dez vezes.

Embora F(0,333) = 0,992, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor de $F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

a) 0,340 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 0,668 e) $\dfrac{1}{3}$

3. (Uel) Leia o texto a seguir.
O Teorema de Pitágoras e a Razão Áurea são utilizados para analisar um Triângulo de Kepler, polígono nomeado em honra ao matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Entretanto, o próprio Kepler atribui esta criação a um professor chamado Magirus. Além disso, sabe-se que este conceito foi recriado inúmeras vezes e, de modo independente, por diversos matemáticos que sucederam Kepler.
Adaptado de: Herz-Fischler, Roger (2000). The Shape of the Great Pyramid. Waterloo, Ontario: Wilfrid Laurier University Press

Um Triângulo de Kepler é definido como um triângulo retângulo tal que seus lados estejam em progressão geométrica de razão q > 1. Seja T um Triângulo de Kepler escaleno de modo que seu menor lado tenha medida unitária.
Sabendo que $\varphi \in \sim$ a única solução positiva da equação polinomial $x^2 = 1 + x$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a área de T em função de φ.

a) $\dfrac{1}{2}\varphi$ b) φ^2 c) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\varphi}$ d) 1 e) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\varphi}$

4. (Uel) Leia o texto a seguir.
Em 1970, o matemático John Conway inventou o “Jogo da Vida”, exemplo teórico de como regras fixas e simples permitem, com o passar das gerações, a criação, a sobrevivência e o fim de vidas simuladas. Daí o nome do jogo!

Admita uma variação do Jogo da Vida como dada a seguir.
Para cada geração $t \in \bullet = \{1, 2, \ldots\}$, há uma sequência numérica infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ tal que $a_n \in \{0,1\}$ para todo $n \in \bullet$.
O número 1 indica que há vida naquela posição e 0 o contrário.
As gerações se sucedem da seguinte forma:
Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ é a sequência da geração t, então a sequência $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_n, \ldots$ da geração t + 1 é dada por:

$$a'_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \text{ e } a_2 = 1 \\ 1, \text{ se } n > 1 \text{ e } a_{n+1} + a_{n-1} = 1 \\ 0, \text{ nos demais casos} \end{cases}$$

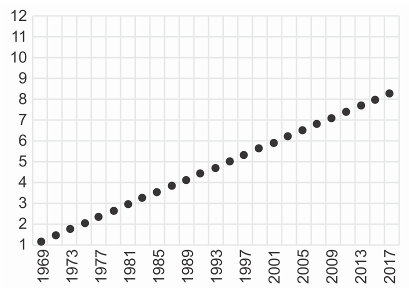
Por exemplo,

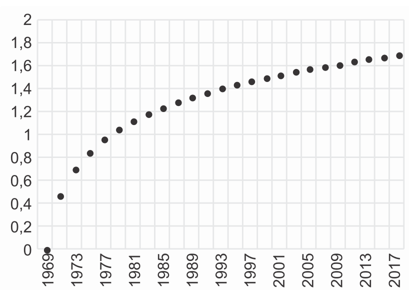
Geração	**Sequência numérica**								
t	n = 1,	n = 2,	n = 3,	n = 4,	n = 5,	n = 6,	n = 7,	n = 8,	...
1	1,	1,	0,	0,	1,	0,	0,	0,	...
2	1,	1,	1,	1,	0,	1,	0,	0,	...
3	1,	0,	0,	1,	0,	0,	1,	0,	...

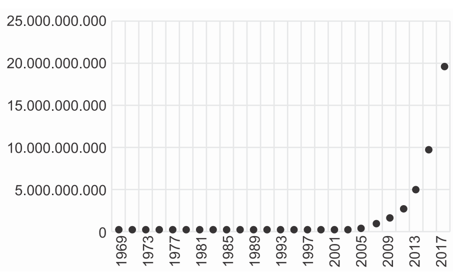
Supondo agora que 1, 0, 0, 0, 0, 0, ... é a sequência da geração t, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a sequência da geração t + 1.
a) 0, 0, 0, 0, 0, ... b) 0, 1, 0, 0, 0, ... c) 1, 1, 0, 0, 0, ...
d) 1, 1, 0, 1, 0, ... e) 1, 1, 1, 1, 1, ...

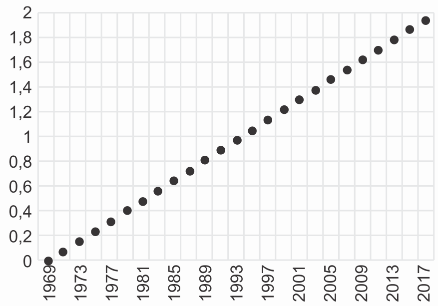
5**.** (Uel) Leia o texto a seguir.
Em abril de 1965 o então presidente da Intel, Gordon Earle Moore, supôs que o conhecimento humano e o progresso tecnológico fariam com que a quantidade de transistores, que podem ser colocados em uma mesma área, dobraria a cada 24 meses.

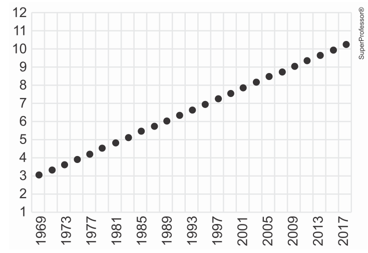
Um matemático deseja representar geometricamente a suposição de Moore. Ele percebe que o número de transistores N(t), que podem ser colocados em uma mesma área, cresce muito rapidamente quando comparado com o tempo t, medido em anos.
Sendo assim, o matemático esboça o gráfico de $y = \log_{10} N(t)$ com $t \in \{1969, 1971, \ldots, 2017\}$.
Sabendo que N(1969) = 1150 e que N(2017) = 19293798400, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o gráfico de $y = \log_{10} N(t)$ com $t \in \{1969, 1971, \ldots, 2017\}$.

a)


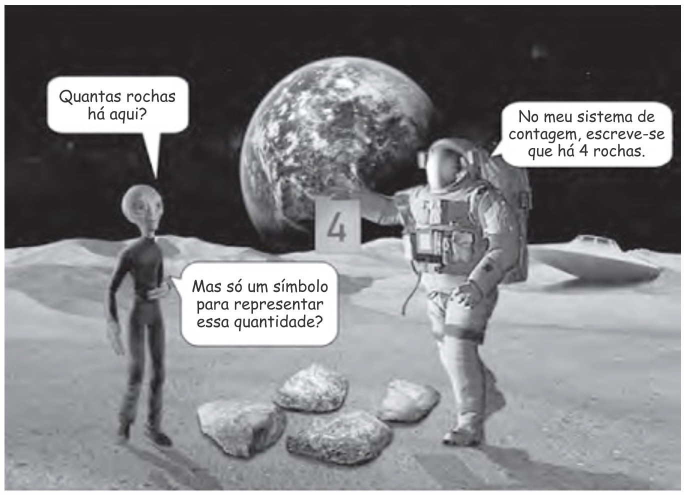
b)


c)


d)


e)


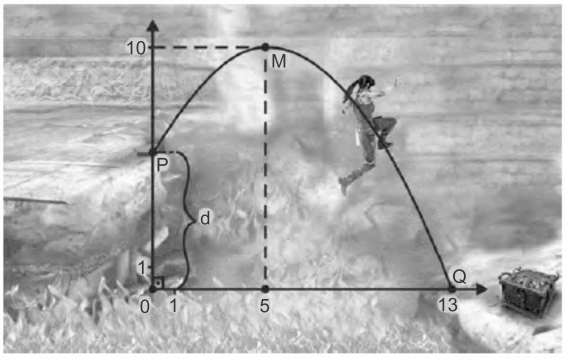
6**.** (Uel) Leia o texto e a charge a seguir.
Traços da origem antropomórfica dos sistemas de contagem podem ser encontrados em inúmeras línguas. Na República Centro-Africana, por exemplo, “cinco” se diz moro, que também traduz-se como mão.
Adaptado de: The Universal History of Numbers. (Georges Ifrah, ed. Wiley, 2000, pp. 21-22)



Adaptado de: *Getty Images*

Um matemático observa o encontro retratado na charge e nota que o alienígena escreve sua contagem de modo diferente dos humanos, utilizando apenas 4 símbolos em vez dos 10 algarismos comumente utilizados por nós. Com seu conhecimento, o matemático formula um mecanismo que traduz a escrita da contagem alienígena para a do humano. Ele considera $A = \{\Diamond, \perp, \zeta, \Xi\}$ o conjunto formado pelos símbolos alienígenas e $f : A \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ a função que atribui, a cada símbolo, os valores $f(\Diamond) = 0, f(\perp) = 1, f(\zeta) = 2$ e $f(\Xi) = 3$. A partir daí, o matemático constrói a função g que traduz um número formado por dois símbolos alienígenas em um inteiro, através da função $g : A \times A \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(x, y) = 4 \cdot f(x) + f(y)$. Por exemplo, se o alienígena escreve $\perp\perp$, o matemático traduz em $g(\perp, \perp) = 4 \cdot f(\perp) + f(\perp) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$.
Com base no texto, na charge e no mecanismo construído pelo matemático, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o elemento do domínio da função g cuja imagem é 4.
a) (ζ, Ξ) b) $(\Diamond, \perp)$ c) (Ξ, Ξ) d) (Ξ, ζ) e) $(\perp, \Diamond)$

7. (Uel) Lara Croft – a famosa personagem feminina da indústria dos *games* – é uma arqueóloga que explora tumbas, templos e campos. Em uma de suas missões, para abrir a Caixa de Pandora, realiza um salto entre dois rochedos, com desnível d, separados por um poço em chamas. Ao chegar do outro lado, observa que a Caixa de Pandora está protegida por um encantamento que somente cessa ao se conhecer o valor de d. Para ajudá-la, saiba que o salto coincide com um trecho de parábola, no plano cartesiano, que passa por três pontos: $P = (0, d)$, $M = (5, 10)$ e $Q = (13, 0)$, onde P marca o início do salto, M é o vértice da parábola, e Q delimita o final do trecho, conforme a figura.



Com base no texto e na figura, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor do desnível d.
a) $\frac{191}{32}$ b) $\frac{192}{32}$ c) $\frac{193}{32}$ d) $\frac{194}{32}$ e) $\frac{195}{32}$

8. (Uel) Nos últimos 20 anos, três vírus foram responsáveis por síndromes respiratórias agudas graves, como a SARS, MERS e a COVID-19.
A previsão exata do número de pessoas infectadas por um determinado vírus é impraticável. Todavia, especialistas assumem que técnicas, como a descrita a seguir, fornecem um limitante para este número.
Seja R uma região afetada por um vírus. Suponha que vivam K pessoas em R, com $K > 2$ um número constante e inteiro. Denote por $h(t)$ o número de pessoas, em R, infectadas pelo vírus até o instante $t \geq 0$, medido em dias. Como dito anteriormente, prever $h(t)$ é inexequível, entretanto pode ser majorado pela função $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de modo que:

$$h(t) \leq y(t) \text{ onde } y(t) = \frac{2K}{2 + (K-2)e^{-3t}}$$

sendo $e > 1$ uma constante irracional.
Com base na técnica apresentada e nos conhecimentos sobre vírus, atribua verdadeiro (V) ou falso (F) às afirmativas a seguir.

( ) No instante $t = 0$, vale que $h(0) = 3$.
( ) Doenças emergentes, como a COVID-19, surgem por diferentes processos, sendo um deles a própria mutação dos vírus.
( ) Em todo instante de tempo $t \geq 0$, vale que $h(t) < K$.
( ) O novo coronavírus é causador da síndrome respiratória aguda severa em humanos, devido ao fato de ser constituído de dupla fita de DNA.
( ) A função y é constante nos dias iniciais da pandemia.

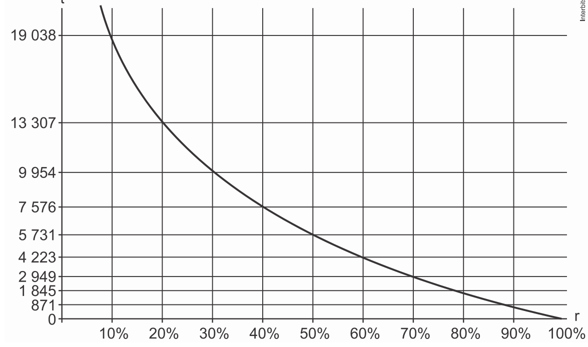
Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.
a) V, F, F, V, F. b) V, F, V, F, V.
c) F, V, V, F, F. d) F, V, F, F, V.
e) F, F, V, V, V.

9. (Uel) Leia o texto e observe a imagem a seguir.
No Brasil, a preservação natural de um cadáver é rara devido ao clima tropical e ao solo ácido, que aceleram a sua decomposição. Por isso, a múmia encontrada em Goianá, Minas Gerais, no século XIX é tão incomum.
Passados t anos após a morte deste ser humano, suponha que a massa $m(t)$ de seu cadáver, medida em quilogramas, seja dada por $m(t) = 40e^{-C \cdot t}$, onde $e > 1$ é uma constante e C é um parâmetro relacionado às características morfoclimáticas da região onde originalmente se encontrava. Admitindo que passados $t = 600$ anos a múmia possuía exatos 4 kg, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor do parâmetro C.

a) $C = \frac{1}{200} \log_e 50$ b) $C = \frac{1}{300} \log_e 20$
c) $C = \frac{1}{400} \log_e 30$ d) $C = \frac{1}{500} \log_e 40$
e) $C = \frac{1}{600} \log_e 10$

10. (Uel) Leia o texto a seguir.
Luzia é de inestimável valor científico por se tratar do mais antigo fóssil humano paleoamericano já encontrado no Brasil. O crânio e ossos da coxa e do quadril de Luzia foram achados em 1975, em uma gruta da região de Lagoa Santa, em Minas Gerais. Seu esqueleto foi datado de 11,5 mil anos e ela deve ter morrido aos 25 anos. Neste século, seu rosto foi reconstituído na Inglaterra.

Um dos processos de datação arqueológica ocorre calculando o porcentual r da quantidade de carbono 14 presente no fóssil em relação à quantidade desse mesmo elemento encontrada em um ser vivo de características semelhantes. Suponha que para fósseis humanos paleoamericanos a figura a seguir exiba o gráfico da função $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}_+$ que associa, a cada r, a quantidade $t = f(r)$ de anos que se passaram desde a morte do ser humano em questão.



Com base no texto e no gráfico, assinale a alternativa correta.
a) No caso de Luzia, o porcentual r no momento de sua datação se encontrava entre 20% e 30%.
b) À medida que o tempo passa, o porcentual r de um fóssil humano paleoamericano cresce em relação a um ser vivo de características semelhantes.
c) Um fóssil humano paleoamericano, datado entre 2949 e 4223 anos, apresenta porcentual r de, no máximo, 50%.
d) O porcentual r apresentado por Luzia, imediatamente após sua morte, se encontrava entre 80% e 90%.
e) O tempo necessário para que um fóssil humano paleoamericano perca 10 pontos percentuais de r é constante.

11. (Uel) Analise a figura a seguir.

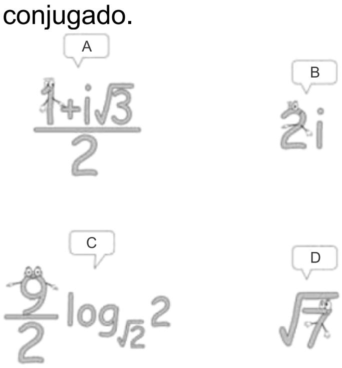

VERMEER, J. *Moça com brinco de pérola*. 1665. Tinta a óleo, 44 cm × 39 cm. Museu Mauritshuis de Haia.

Utilizando duas retas graduadas e perpendiculares, um estudioso caracteriza cada ponto da obra de Johannes Vermeer, como um par ordenado no plano cartesiano, de forma que um ponto no brinco de pérola esteja associado à origem $(0, 0)$. De acordo com a associação feita, o estudioso constata que os pontos de coordenadas $(-10, 0)$ e $(-8, 8)$ se localizam, respectivamente, na boca e no olho retratados.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, uma propriedade da parábola que passa pelos três pares ordenados presentes no texto.
a) Tem por equação $y + x^2 + 5x = 0$
b) Tem concavidade voltada para cima.
c) Tem por vértice um ponto na região do ombro retratado.
d) Tem por equação $2y + x^2 + 10x = 0$
e) Admite três raízes reais distintas, todas localizadas no turbante.

12. (Uel) Uma estratégia para obter efeito humorístico em quadrinhos é atribuir a objetos abstratos características e ações tipicamente humanas. A figura a seguir é um exemplo de aplicação desse recurso.

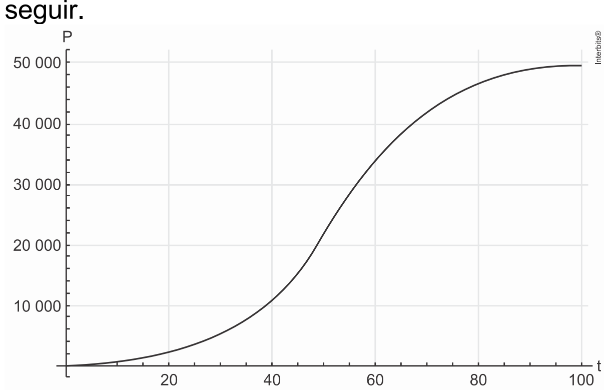
Supondo que cada número diga uma verdade matemática sobre si mesmo, relacione as frases (de I a IV) aos balões de diálogo (de A a D).
I. Meu cubo é irracional.
II. Sou racional.
III. Sou puramente imaginário.
IV. Meu inverso multiplicativo coincide com meu conjugado.



Assinale a alternativa que contém a associação correta.
a) I-B, II-C, III-A, IV-D.
b) I-C, II-B, III-A, IV-D.
c) I-D, II-A, III-C, IV-B.
d) I-D, II-A, III-B, IV-C.
e) I-D, II-C, III-B, IV-A.

13. (Uel) Os vírus dependem de uma célula hospedeira susceptível para se multiplicarem. Seja $e > 2$ uma constante real. Suponha que $P : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ represente a quantidade de partículas virais no interior de uma célula hospedeira no instante $t \geq 0$, de forma que $P(t) = \dfrac{5 \cdot 10^4}{1 + 200\, e^{\frac{-1}{10}t}}$

O gráfico de P no intervalo $0 \leq t \leq 100$ é dado a seguir.



Com base no texto, na equação e no gráfico, atribua (V) verdadeiro ou (F) falso às afirmativas a seguir.
(   ) De acordo com a função, o número de partículas virais nunca atinge $5 \cdot 10^4$.

( ) No instante inicial $t = 0$, existem 25 partículas virais dentro da célula.
( ) P é uma função decrescente.
( ) O número de partículas virais atinge 10.000 unidades antes do instante $t = 60$.
( ) A função $P : \sim^{+} \to \sim$ é sobrejetora.
Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.
a) V, V, F, V, F. b) V, F, F, V, F.
c) V, F, F, V, V. d) F, V, V, F, F.
e) F, F, V, F, V.

14. (Uel) Conforme um fármaco é injetado, a partir do instante $t = 0$, sua concentração no sangue aumenta até atingir um máximo C em $t = T_m$. Considere que, na sequência, o rim inicie o processo de excreção do fármaco, fazendo com que sua concentração no sangue caia progressivamente. Suponha que a função $f : \sim^{+} \to \sim$ determine a concentração $f(t)$ desse fármaco no sangue em um instante de tempo $t \geq 0$.

Sabendo que $f(t) = C\left(\frac{t}{T_m}\right)^2$ se $t < T_m$, e considerando que $f(t) = C2^{T_m}2^{-t}$ se $t \geq T_m$, com T_m e C constantes positivas, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, os dois instantes de tempo em que a concentração desse fármaco no sangue é $\frac{C}{2}$.

a) T_m e $\frac{C}{2}$ b) $\frac{T_m}{2}$ e C c) 2^{T_m} e C
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}T_m$ e $1 + T_m$ e) $1 - T_m$ e $\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T_m\right)$

15. (Uel) Leia o texto a seguir.

Foi ali no meio da praça. [...] Zuzé Paraza, pintor reformado, tossiu sacudindo a magreza do seu todo corpo. Então, assim contam os que viram, ele vomitou um corvo vivo. O pássaro saiu inteiro das entranhas dele. [...] Estivera tanto tempo lá dentro que já sabia falar.

COUTO, Mia. O último aviso do corvo falador. In: *Vozes anoitecidas*. São Paulo: Companhia das Letras, 2015. p. 29.

Zuzé desafiou o corvo falador. De dentro de seu gabinete, Zuzé mostrou ao corvo a seguinte tabela.

A	B	C
7	9	0
20	5	1
24	6	2
2	13	3

Zuzé solicita ao corvo que pense em uma equação matemática que relacione, linha a linha, os números das colunas A, B e C da tabela. Prontamente o corvo falante responde: $i^{A+B} = i^{C}$, onde i é a unidade imaginária.
Com base na equação dita pelo corvo e sabendo que A, B e C são números naturais, considere as afirmativas a seguir.
I. Se $A + B$ é múltiplo de 4 e $C = 4$, então A, B e C satisfazem a equação.
II. Se $A = 26, B = 44$ e $C = 30$, então A, B e C satisfazem a equação.
III. Se $A = B = 1$, então a única possibilidade para que A, B e C satisfaçam a equação é $C = 6$.
IV. Se A e B são números ímpares e $C = 1$, então A, B e C satisfazem a equação.

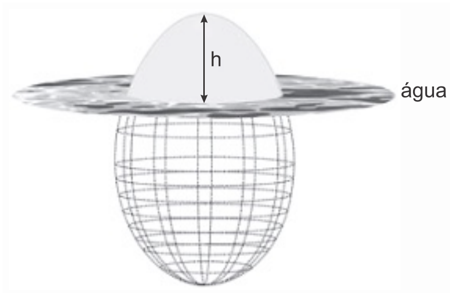
Assinale a alternativa correta.
a) Somente as afirmativas I e II são corretas.
b) Somente as afirmativas I e IV são corretas.
c) Somente as afirmativas III e IV são corretas.
d) Somente as afirmativas I, II e III são corretas.
e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
Analise a figura a seguir e responda à(s) questão(ões).

(Rivane Neuenschwander, *Mal-entendido*, casca de ovo, areia, água, vidro e fita mágica, 2000.)

16. (Uel) Leia o texto e observe a figura a seguir.

O corpo da galinha sabe muito de geometria. Foi o ovo que me contou. Porque o ovo é um objeto geométrico construído segundo rigorosas relações matemáticas. A galinha nada sabe sobre geometria, na cabeça. Mas o corpo dela sabe. Prova disso é que ela bota esses assombros geométricos. Sabe muito também sobre anatomia. O ovo não é uma esfera.



Dois valores positivos são necessários para descrever a geometria de um ovo: R e L. Em função destes, o volume total V do ovo é dado pela expressão $V = \pi R^2 L$. Suponha que um ovo flutue em um copo d’água, conforme indicado na figura. Um matemático determina que o volume S da parte submersa do ovo, em função da altura $h > 0$ da parte que se encontra acima d’água, é dado pela equação a seguir.

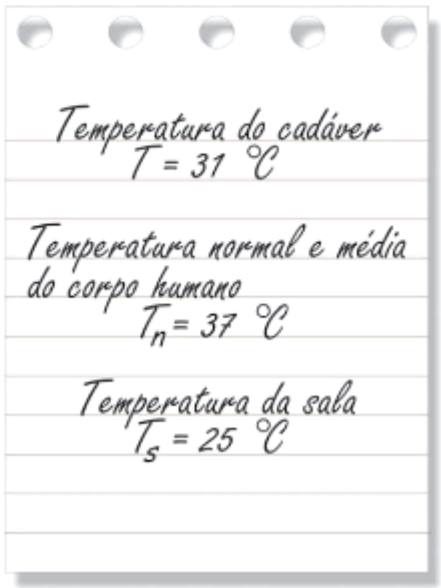
$$S = \frac{\pi R^2}{L}\left(L^2 - \frac{1}{2}h^2\right)$$

Considerando as equações, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor de h, sabendo que o volume da parte submersa corresponde a 80% do volume total do ovo.

a) L b) $0{,}2\,L$ c) $0{,}8\,L$ d) $\frac{\sqrt{8}}{10}L$ e) $\frac{\sqrt{10}}{5}L$

17. (Uel) Leia o texto a seguir.

O processo de decomposição do corpo começa alguns minutos depois da morte. Quando o coração para, ocorre o algor mortis ou o frio da morte, quando a temperatura do corpo diminui até atingir a temperatura ambiente.
Suponha que um cadáver é analisado por um investigador de polícia às 5 horas da manhã do dia 28, que detalha as seguintes informações em seu bloco de anotações:



Imediatamente após escrever, o investigador utiliza a Lei de Resfriamento

$$T = (T_n - T_s)\left(\sqrt[6]{2}\right)^{-t} + T_s$$

para revelar a todos os presentes que faz t horas que a morte ocorreu. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a hora e o dia da morte, segundo o investigador.

a) 11 horas da noite do dia 27
b) 8 horas da noite do dia 27
c) 2 horas da manhã do dia 28
d) 4 horas da manhã do dia 28
e) 10 horas da manhã do dia 27

18. (Uel) Como podemos compreender a dinâmica de transformar números? Essa pergunta pode ser respondida com o auxílio do conceito de uma função real. Vejamos um exemplo. Seja $f : \sim \to \sim$ a função dada por $f(x) = x\sqrt{5} + 1 - 2x.$ Se $a, b \in \sim$ são tais que $f(a) = b,$ então diremos que b é descendente de a e também convencionaremos dizer que a é ancestral de $b.$ Por exemplo, 1 é descendente de $0,$ já que $f(0) = 1.$ Note também que 1 é ancestral de $\sqrt{5} - 1,$ uma vez que $f(1) = \sqrt{5} - 1.$

Com base na função dada, e nessas noções de descendência e ancestralidade, atribua V (verdadeiro) ou F (falso) às afirmativas a seguir.

( ) Todo número real tem descendente.
( ) $2 + \sqrt{5}$ é ancestral de $2.$
( ) Todo número real tem ao menos dois ancestrais distintos.
( ) Existe um número real que é ancestral dele próprio.
( ) $6 - 2\sqrt{5}$ é descendente de $5.$

Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.
a) F, F, F, V, V b) F, V, F, F, V
c) V, V, F, V, F d) V, V, V, F, V
e) V, F, V, V, F

19. (Uel) Leia o texto a seguir.

Precisamos de um nome para o novo replicador, um substantivo que comunique a ideia de unidade de transmissão cultural. “Mimeme” vem do grego “aquilo que é replicado”, mas eu quero um monossílabo que se pareça com gene. Eu espero que meus amigos clássicos me perdoem por abreviar mimeme para meme. Se uma ideia se alastra, é dita que se propaga sozinha.
Adaptado de: DAWKINS, R. O gene egoísta. Trad. Geraldo H. M. Florsheim. Belo Horizonte: Itatiaia, 2001. p. 214.

Diversos segmentos têm utilizado serviços de marketing para criação e difusão de *memes* de seu interesse. Um partido político com $P_0 = 20$ filiados encomendou um anúncio que se tornou um *meme* em uma rede social, sendo que 5% dos $K = 2 \cdot 10^9$ usuários ativos visualizaram o anúncio no instante $t = 1.$ Sejam $e > 1,$ $r > 0$ constantes e suponha que a função $P(t)$ dada por

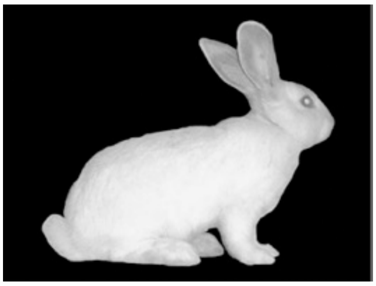
$$P(t) = \frac{K \cdot P_0 \cdot e^{r \cdot t}}{K + P_0(e^{r \cdot t} - 1)}$$

representa a quantidade de usuários da rede social que visualizaram o *meme* no instante $t.$

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor da constante r para essa rede social.

a) $\log_e\left(\dfrac{10^8-1}{19}\right)$ b) $\log_e\left(\dfrac{10^9-1}{19}\right)$ c) $\log_e\left(\dfrac{10^9-1}{20}\right)$
d) $\sqrt{\dfrac{10^8-1}{19}}$ e) $\sqrt{\dfrac{10^9-1}{20}}$

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:
Observe a figura a seguir e responda à(s) questão(ões).



Eduardo Kac, GFP *Bunny*, 2000

Em 2000, o artista Eduardo Kac, carioca radicado nos Estados Unidos, criou GFP Bunny, um coelho geneticamente modificado que brilha em presença de luz azul graças à Proteína Fluorescente (GFP) inserida em seu DNA.

20. (Uel) A meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que sua atividade seja reduzida à metade da atividade inicial, ou seja, o elemento radioativo perde metade de sua massa a cada período de tempo. A braquiterapia é uma das modalidades de tratamento da radioterapia contra o câncer, e um dos elementos radioativos utilizados é o ^{103}Pd, cuja meia-vida é de 17 dias.
Considerando a massa inicial de 16 g de ^{103}Pd, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a massa desse elemento radioativo decorridos 136 dias.
a) $\dfrac{1}{16}$ g b) $\dfrac{1}{4}$ g c) $\dfrac{1}{2}$ g d) 2 g e) 8 g

21. (Uel) Leia o texto a seguir.
Câncer é essencialmente caracterizado pelo crescimento desordenado de células que invadem órgãos e tecidos, sendo considerado atualmente um sério problema de saúde pública mundial. Sabe-se que as células tumorais competem entre si por recursos vitais e oxigênio. Um modelo de crescimento tumoral é descrito pela função

$$N(t)=\frac{K}{1+\left(\dfrac{K}{N_0}-1\right)\cdot(2,7)^{-rt}},$$

que determina, a cada instante t, a população de células cancerígenas; sendo que r é a constante de crescimento intrínseca dessas células, N_0 é a população inicial de células tumorais; K é a maior quantidade de células que um tumor maligno pode atingir com os nutrientes disponíveis.
A partir dessas informações, atribua V (verdadeiro) ou F (falso) às afirmativas a seguir.

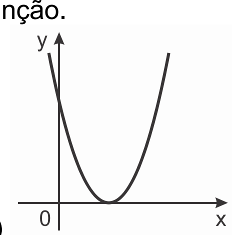
( ) Se $t=0$, então $N(t)=N_0$.
( ) K pode assumir valores negativos.
( ) N_0 é sempre maior que K.
( ) Se $N_0=K$, então $N(t)=K$.
( ) Quando t cresce ilimitadamente, $(2,7)^{-rt}$ se aproxima de 0 (zero) e $N(t)$ é aproximadamente K.

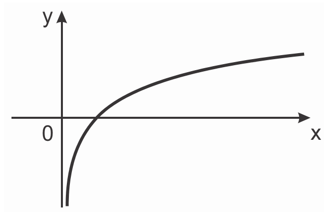
Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.
a) V, V, F, F, F. b) V, F, V, F, F. c) V, F, F, V, V.
d) F, V, V, F, V. e) F, F, V, V, F.

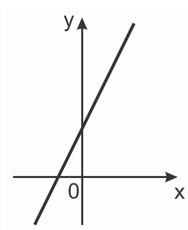
TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
Leia o texto a seguir e responda à(s) questão(ões).

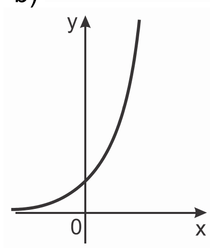
Um dos principais impactos das mudanças ambientais globais é o aumento da frequência e da intensidade de fenômenos extremos, que quando atingem áreas ou regiões habitadas pelo homem, causam danos. Responsáveis por perdas significativas de caráter social, econômico e ambiental, os desastres naturais são geralmente associados a terremotos, tsunamis, erupções vulcânicas, furacões, tornados, temporais, estiagens severas, ondas de calor etc.

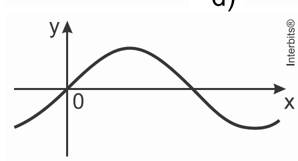
22. (Uel) Em relação aos tremores de terra, a escala Richter atribui um número para quantificar sua magnitude. Por exemplo, o terremoto no Nepal, em 12 de maio de 2015, teve magnitude $7{,}1$ graus nessa escala. Sabendo-se que a magnitude y de um terremoto pode ser descrita por uma função logarítmica, na qual x representa a energia liberada pelo terremoto, em quilowatts-hora, assinale a alternativa que indica, corretamente, o gráfico dessa função.

a)


b)


c)


d)


e)


Gabarito:

Resposta da questão 1:
[D]

Aplicando a lei da função dada, chegamos a:

$$f(n+5) = f(n+4) + f(n+3)$$
$$f(n+5) = f(n+3) + f(n+2) + f(n+2) + f(n+1)$$
$$f(n+5) = f(n+2) + f(n+1) + 2\left[f(n+1) + f(n)\right] + f(n+1)$$
$$f(n+5) = f(n+1) + f(n) + f(n+1) + 2f(n+1) + 2f(n) + f(n+1)$$
$$\therefore f(n+5) = 5f(n+1) + 3f(n)$$

Resposta da questão 2:
[E]

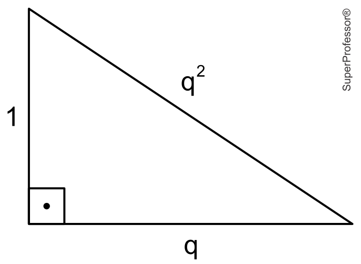
Pela função dada, temos:

$$B\left(\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$B\circ B\left(\frac{1}{3}\right) = B\left(\frac{2}{3}\right) = 2\cdot\frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Ou seja, os valores das funções em B se intercalam entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$. Como as compostas de índice ímpar valem $\frac{2}{3}$ e as compostas de índice par valem $\frac{1}{3}$, concluímos que $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$

Resposta da questão 3:
[E]

Razão q (q > 1):



$$q^4 = q^2 + 1^2$$
$$q^4 - q^2 - 1 = 0$$
$$q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Solução positiva da equação:

$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Área de T:

$$A = \frac{1\cdot q}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$\therefore A = \frac{1}{2}\sqrt{\varphi}$$

Resposta da questão 4:
[B]

Calculando de acordo com a função dada, obtemos:

Geração	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
t	1	0	0	0	0
t + 1	0	1	0	0	0

Ou seja, a sequência formada é 0, 1, 0, 0, 0, ...

Resposta da questão 5:
[E]

Do enunciado, sabemos que o gráfico deve passar pelos pontos $(1969, \log_{10} 1150)$ e $(2017, \log_{10} 19293798400).$ Como:

$$(1969, \log_{10} 1150) \cong (1969, \log_{10} 1000) = (1969, 3)$$
$$(2017, \log_{10} 19293798400) \cong (2017, \log_{10} 10000000000) = (2017, 10)$$

Concluímos que apenas o gráfico de alternativa [E] passa pelos pontos obtidos.

Obs: Também sabemos que o gráfico deve se comportar como uma função afim, pois:

$$y = \log_{10} N(t) = \log_{10} 1150 \cdot 2^{\frac{(t-1969)}{2}} = \log_{10} 1150 + \frac{(t-1969)}{2}\log_{10} 2$$

Resposta da questão 6:
[E]

Da descrição da função, temos que:

$$g(\zeta, \Xi) = 4\cdot 2 + 3 = 11$$
$$g(\Diamond, \perp) = 4\cdot 0 + 1 = 1$$
$$g(\Xi, \Xi) = 4\cdot 3 + 3 = 15$$
$$g(\Xi, \zeta) = 4\cdot 3 + 2 = 14$$
$$g(\perp, \Diamond) = 4\cdot 1 + 0 = 4$$

Portanto, o elemento do domínio da função g cuja imagem é 4 é o $(\perp, \Diamond)$.

Resposta da questão 7:
[E]

A forma canônica da parábola é

$$y = a\cdot(x - x_V)^2 + y_V,$$

com $V = (x_V, y_V)$ sendo o vértice da parábola.

Sabendo que a parábola passa pelos pontos M e Q, com M sendo o vértice, temos

$$0 = a \cdot (13-5)^2 + 10 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{32}.$$

Portanto, a resposta é

$$f(0) = -\frac{5}{32} \cdot (0-5)^2 + 10$$
$$= \frac{195}{32}.$$

Resposta da questão 8:
[C]

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Matemática]
[I] Falsa. Para $t = 0$, temos:

$$h(0) \leq y(0) = \frac{2K}{2+(K-2)e^0} = \frac{2K}{K} = 2$$

[III] Verdadeira. Para valores muito grandes de t:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2K}{2+(K-2)\underbrace{e^{-3t}}_{0}} = \frac{2K}{2} = K$$

Como $h(t) \leq y(t)$, temos que $h(t) < K$.

[V] Falsa. Como $y(1) \neq y(0)$, a função não permanece constante nos dias iniciais.

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Biologia]
[II] Verdadeira. A mutação é a principal fonte de variabilidade genética dos seres vivos, incluindo vírus. Dado que a replicação do RNA não possui uma fonte de reparo; nos RNA-vírus a taxa de mutação é significativamente maior do que as que ocorrem nos vírus portadores de DNA.

[IV] Falsa. Os coronavírus possuem RNA de fita simples como material genético.

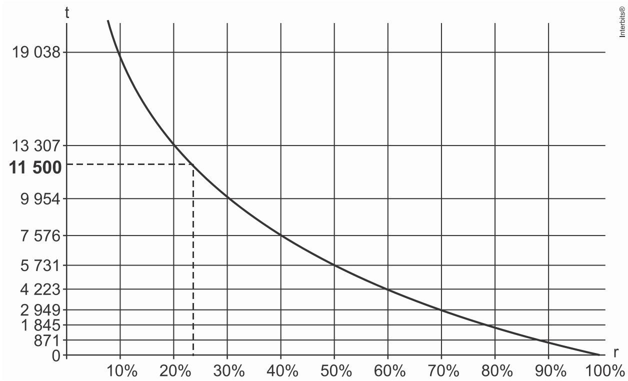
Resposta da questão 9:
[E]

Do enunciado, segue que:

$$4 = 40 \cdot e^{-C\cdot 600}$$
$$\frac{1}{10} = e^{-C\cdot 600}$$
$$\log_e \frac{1}{10} = \log_e e^{-C\cdot 600}$$
$$\log_e 10^{-1} = -C \cdot 600 \cdot \log_e e$$
$$-1 \cdot \log_e 10 = -C \cdot 600 \cdot 1$$
$$\log_e 10 = 600C$$
$$C = \frac{1}{600}\log_e 10$$

Resposta da questão 10:
[A]

Do enunciado e do gráfico, segue que:



Dessa forma, o percentual r, de Luiza, no momento de sua datação, se encontrava entre 20% e 30%.

Resposta da questão 11:
[D]

A equação da parábola que passa pelos pontos $(0, 0), (-10, 0)$ e $(-8, 8)$ é dada por:

$$y = a \cdot (x-0) \cdot (x-(-10))$$
$$y = a \cdot x \cdot (x+10)$$

Como $(-8, 8)$ é um ponto da parábola,

$$8 = a \cdot (-8) \cdot (-8+10)$$
$$8 = -16a$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

Daí,

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot (x+10)$$
$$2y = -x^2 - 10x$$
$$2y + x^2 + 10x = 0$$

Resposta da questão 12:
[E]

[I] deve ser relacionada com a letra D, pois
$\sqrt{7}^3 = 7\sqrt{7}$ (irracional)
[II] deve ser relacionado com a letra C, pois
$\frac{9}{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9$ (racional)
[III] deve ser relacionado com a letra B, pois $2i$ é imaginário puro.
[IV] deve ser relacionado com a letra A, pois

$$\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{3}\cdot i}{2} = \frac{1^2+3}{4} = 1$$

Logo, a opção correta será dada por:
[E] I-D, II-C, III-B, IV-A

Resposta da questão 13:
[B]

[V] pois $200\,e^{\frac{-1}{10}t} > 0$ para todo x real. Sendo assim, o denominador sempre será maior que um, impossibilitando que $\dfrac{5\cdot10^4}{1+200\,e^{\frac{-1}{10}t}} = 5\cdot10^4.=$

$5\cdot10^4.$

[F] No instante $t=0$ existem aproximadamente 25 partículas virais dentro da célula.

$$P(0)=\frac{5\cdot10^4}{1+200\,e^{\frac{-1}{10}\cdot0}}=\frac{5\cdot10^4}{1+200}\simeq 250$$

[F] P é uma função crescente.

[V] De acordo com o gráfico 10.000 partículas virais são atingidas para t valendo aproximadamente $10.$

[F] Falsa, pois o contradomíno é diferente do conjunto imagem.

$\sim\ \neq [0,\ 50.000[$

Portanto, a opção correta é a [B] V, F, F, V, F.

Resposta da questão 14:
[D]

$$\frac{C}{2}=C\left(\frac{t}{T_m}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}=\left(\frac{t}{T_m}\right)^2 \Rightarrow t=\frac{T_m\cdot\sqrt{2}}{2}$$ para $t<T_m.$

$$\frac{C}{2}=C2^{T_m}2^{-t} \Rightarrow \frac{1}{2}=2^{T_m}2^{-t} \Rightarrow 2^{-1}=2^{T_M-t} \Rightarrow -1=T_M-t \Rightarrow$$
para $t\geq T_m.$

Resposta da questão 15:
[A]

[I] Verdadeira, pois:

$i^{A+B}=i^{4\cdot n}(n\in \bullet\ )=i^0=1$

$i^c=i^{4\cdot n}(n\in \bullet\ )=i^0=1$

[II] Verdadeira, pois:

$i^{26+44}=i^{70}=i^2=-1$

$i^{30}=i^2=-1$

[III] Falsa, pois:

$i^{1+1}=i^{10}$ (um exemplo contrário à afirmação)

[IV] Falsa, pois:

$i^{5+3}\neq\ i^1$ (um exemplo contrário à afirmação)

Resposta da questão 16:
[E]

Calculando:

$$0{,}8\cdot\pi R^2L=\frac{\pi R^2}{L}\left(L^2-\frac{1}{2}h^2\right)\Rightarrow 0{,}8L=\frac{1}{L}\left(L^2-\frac{1}{2}h^2\right)\Rightarrow 0{,}8L^2=L^2-\frac{1}{2}h^2$$

$$0{,}2L^2=\frac{1}{2}h^2\Rightarrow h^2=\frac{4}{10}L^2\Rightarrow h=\frac{2}{\sqrt{10}}L=\frac{\sqrt{10}}{5}L$$

Resposta da questão 17:
[A]

Calculando:

$$T=\left(T_n-T_s\right)\left(\sqrt[6]{2}\right)^{-t}+T_s$$

$$31=(37-25)\left(\sqrt[6]{2}\right)^{-t}+25\Rightarrow 6=12\cdot\left(\sqrt[6]{2}\right)^{-t}\Rightarrow 1/2=\left(2^{1/6}\right)^{-t}\Rightarrow 2^{-1}=2^{-t/6}$$

$$\frac{-t}{6}=-1\Rightarrow t=6\text{ horas}$$

Assim, se faz 6 horas que a morte ocorreu, isso significa dizer que esta ocorreu às 11 horas da noite do dia 27.

Resposta da questão 18:
[C]

Analisando as proposições uma a uma:

[I] Verdadeira, pois $f:\sim\ \rightarrow\ \sim.$

[II] Verdadeira. Calculando:

$f(2+\sqrt{5})=(2+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}+1-2\cdot(2+\sqrt{5})$

$f(2+\sqrt{5})=2\sqrt{5}+5+1-4-2\sqrt{5}\Rightarrow f(2+\sqrt{5})=2$

[III] Falsa.

[IV] Verdadeira. Calculando:

$x=x\sqrt{5}+1-2x\Rightarrow -0{,}7639x=-1\Rightarrow x\approx 1{,}309$

[V] Falsa. Calculando:

$f(5)=5\sqrt{5}+1-2\cdot5\Rightarrow f(5)=5\sqrt{5}-9$

Resposta da questão 19:
[A]

Calculando:

$$P(t) = \frac{K \cdot P_0 \cdot e^{r \cdot t}}{K + P_0 (e^{r \cdot t} - 1)}$$

$$P(1) = 0{,}05 \cdot 2 \cdot 10^9 = \frac{2 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot e^{r \cdot 1}}{2 \cdot 10^9 + 20 \cdot (e^{r \cdot 1} - 1)} \to 5 \cdot 10^{-2} = \frac{20 \cdot e^r}{2 \cdot 10^9 + 20e^r - 20}$$

$$5 \cdot 10^{-2} \cdot (2 \cdot 10^9 + 20e^r - 20) = 20 \cdot e^r$$

$$10^8 + e^r - 1 = 20e^r \to 10^8 - 1 = 19e^r \to e^r = \frac{10^8 - 1}{19}$$

$$r = \log_e \left(\frac{10^8 - 1}{19} \right)$$

Resposta da questão 20:
[A]

Seja $m : \bullet \to \sim$ a função dada por $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{17}}$, em que $m(t)$ é a massa, em gramas, do elemento ^{103}Pd após t dias. Logo, se $m(0) = m_0 = 16$ g, então

$$m(136) = 16 \cdot 2^{-\frac{136}{17}} = 2^4 \cdot 2^{-8} = 2^{-4} = \frac{1}{16} \text{ g.}$$

Resposta da questão 21:
[C]

Se $t = 0$, então

$$\begin{aligned} N(0) &= \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) \cdot (2{,}7)^{-r \cdot 0}} \\ &= \frac{K}{1 + \frac{K}{N_0} - 1} \\ &= N_0. \end{aligned}$$

Se K é o número máximo de células que um tumor maligno pode atingir, então $K > 0$.

Para t suficientemente grande, temos $(2{,}7)^{-rt} = \frac{1}{(2{,}7)^{rt}} \cong 0$. Em consequência, vem

$$N(t) \cong \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) \cdot 0} = K.$$

Desde que N_0 é a população inicial de células tumorais, e K é o número máximo de células que um tumor pode atingir, tem-se $N_0 < K$.

Se $N_0 = K$, então

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{K} - 1 \right) \cdot (2{,}7)^{-rt}} = K.$$

Resposta da questão 22:
[B]

Se $y = f(x)$, então o gráfico que mais se assemelha ao de uma função logarítmica é o da alternativa [B].